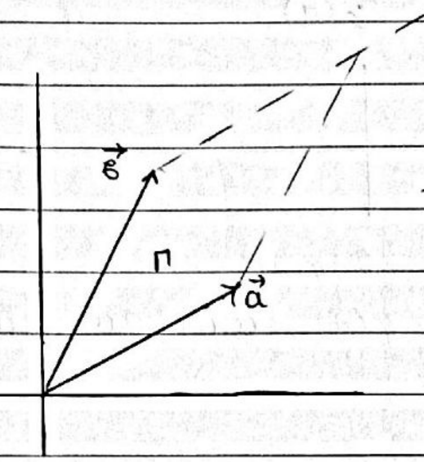
Μαθημα 20ο No. Date 13/5/2016

Αναλυτικη Γεωμ.

Μετασχηματισμος Εμβαδου/Ογκου μεσω γραμμικων γεωμετρικων μετασχηματισμων

Επιπεδο

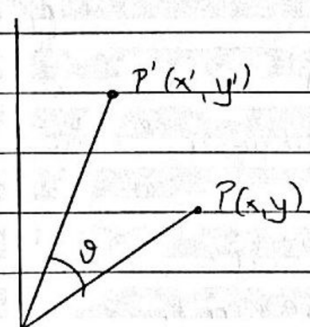


Εστω (Π) το τετραπλευρο (παραλληλογραμ/μο) που οριζεται απο τα $\vec{a}, \vec{b}$

Εστω $E(\Pi)$ το αντιστοιχο εμβαδο

Εστω $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμ. γεωμ. μετασχ. και εστω Α ο πινακας αυτου

π.χ

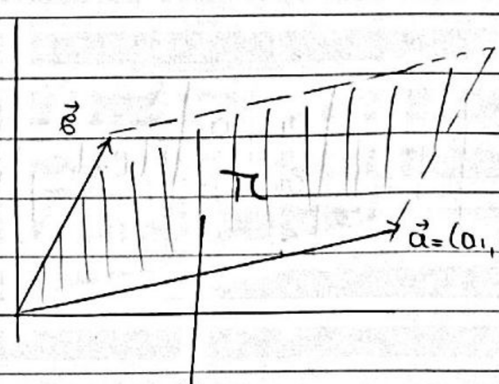


$\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{b} = (x_2, y_2)$

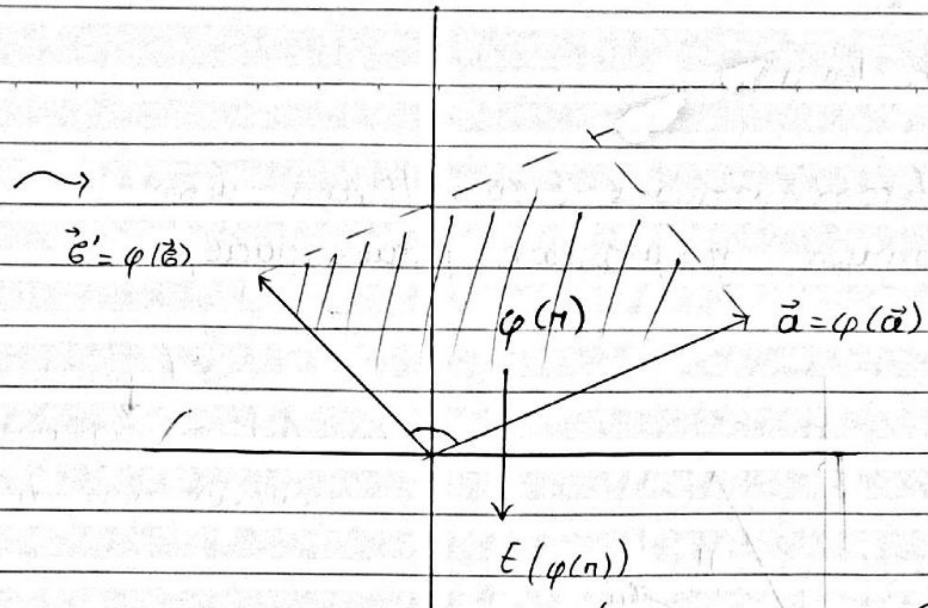
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\varphi}$

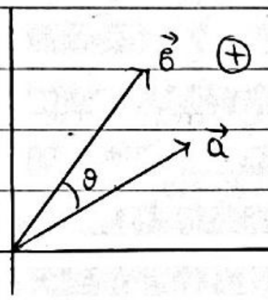


$\rightsquigarrow$

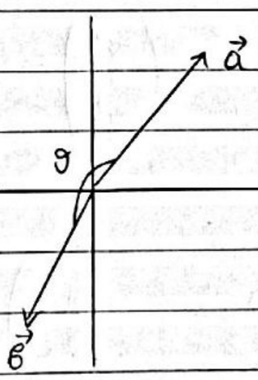
$E(\Pi) = |\vec{a} \times \vec{b}|$



$\varphi(\vec{a}) = (\alpha \cdot a_1,\ \beta a_2,\ \gamma a_1 + \delta a_2)$



Λεμε οτι τα $\vec{a}, \vec{b}$ ειναι θετικα προσανατολισμενα αν $\sin\theta > 0$, $0 \le \theta \le \pi$



$\pi < \theta < 2\pi \to$ τα $\underset{(a_1, a_2)}{\vec{a}}, \overset{(b_1, b_2)}{\vec{b}}$ αρνητικα προσανατολισμενα

Αποδεικνυουμε οτι:

$$\sin\theta = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Αν $\vec{a} = (a_1, a_2)$ $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{e}_1^{\oplus} & \vec{e}_2^{\ominus} & \vec{e}_3^{\oplus} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \cancel{|\vec{e}_3|}^{\,1} \right| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|$$

$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Εστω ϕ γραμμικος γεωμ. μετασχ. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πινακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}^T \quad , \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \Rightarrow \varphi(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 \\ \gamma a_1 + \delta a_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \beta_1 + \beta \beta_2 \\ \gamma \beta_1 + \delta \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$E\mu(\varphi(\pi)) = \left| \begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \gamma a_1 + \delta a_2 \\ \alpha \beta_1 + \beta \beta_2 & \gamma \beta_1 + \delta \beta_2 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| (\alpha a_1 + \beta a_2) \cdot (\gamma \beta_1 + \delta \beta_2) - (\alpha \beta_1 + \beta \beta_2) \cdot (\gamma a_1 + \delta a_2) \right| =$$

$$= \left| \alpha a_1 \gamma \beta_1 + \alpha a_1 \delta \beta_2 + \beta a_2 \gamma \beta_1 + \beta a_2 \delta \beta_2 - \alpha \beta_1 \gamma a_1 - \alpha \beta_1 \delta a_2 - \beta \beta_2 \gamma a_1 - \beta \beta_2 \delta a_2 \right|$$

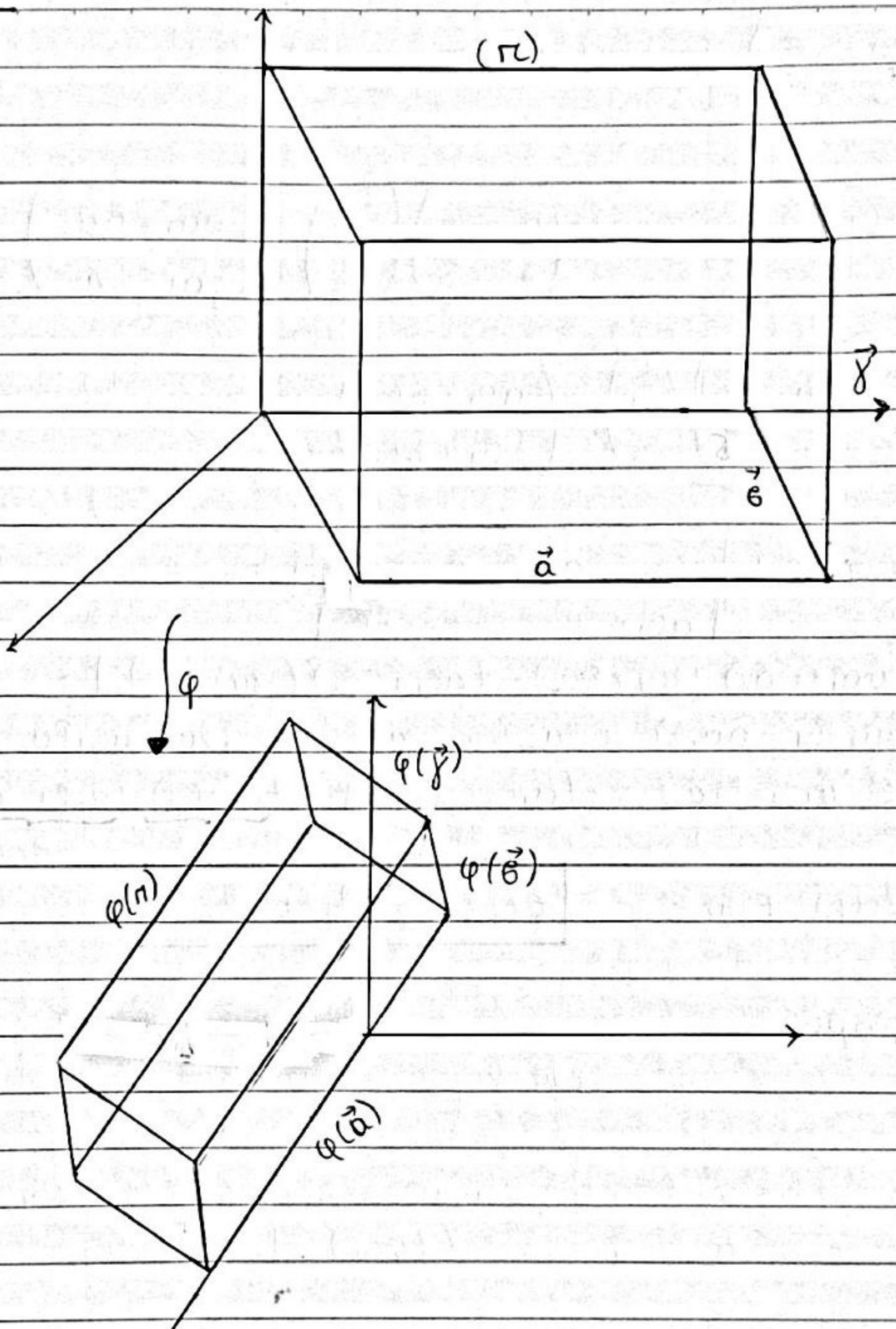
$$= \left| \alpha\delta (a_1 \beta_1 - \beta_1 a_2) - \beta\gamma (a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1) \right| = \left| \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{\det A} \cdot \underbrace{(a_1 \beta_1 - a_2 \beta_1)}_{E(\pi)} \right| =$$

$$= |\det A| \cdot E(\pi) \Rightarrow \boxed{E(\varphi(\pi)) = |\det A| \cdot E(\pi)}$$

Θεωρημα

Εστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμ. γεωμ. σχηματισμος με $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (οπου $\det A \neq 0$). Αν (π) παραλληλογραμμο με κορυφη την αρχη των αξονων $\Rightarrow E(\varphi(\pi)) = |\det A| \cdot E(\pi)$

$\mathbb{R}^3$



$|(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})|$ = Ογκος του παραλληλογραμμου που οριζουν τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

π.χ

Εστω $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ειναι γραμ. γεωμ. μετασχ. με

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

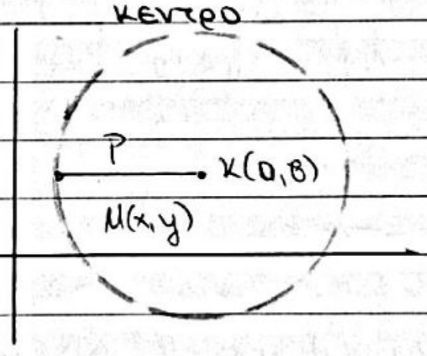
$\Rightarrow V(\varphi(\Pi)) = |\det A| \cdot V(\Pi)$ για οποιοδηποτε παραλ. (Π) του $\mathbb{R}^3$

Επιπεδες Καμπυλες 2ου βαθμου

Γενικα η εξισωση 2ου βαθμου που θα μελετησουμε ειναι η: $Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$

Κυκλος (στο Oxy)

Οριζεται ο γεωμετρικος τοπος των σημειων $M(x,y)$ που ισαπεχουν απο $\underbrace{\text{σταθερο σημειο } K(\alpha,\beta)}_{\text{κεντρο}}$ $\underbrace{\text{σταθερη αποσταση } \rho}_{\text{ακτινα}}$



$\Rightarrow |\vec{MK}| = \rho$ οπου $\vec{KM} = (x-\alpha, y-\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \rho \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$

Αν $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ οπου $A = -2\alpha$, $B = -2\beta$, $\Gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2$

$\Rightarrow \pi: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ ειναι η εξισωση κυκλου με κεντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και $\rho = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}}$

και αντίστροφα

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \Rightarrow$$
$$x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+By+\left(\frac{B}{2}\right)^2+\Gamma-\left(\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2=0 \Rightarrow$$
$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\Gamma+\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2$$

(*) Μου αρκούν τρία σημεία κύκλου για τον προσδιορισμό του (άγνωστα A, B, Γ) $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3) \in C(K,\rho)$
$\Rightarrow$ αντικαθιστούμε στην $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ και έχω
$\begin{cases} 3 \text{ εξισώσεις} \\ 3 \text{ αγνώστους} \end{cases}$

π.χ

Να βρεθεί ο κύκλος με ακτίνα $\rho=4\sqrt{5}$ και ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): x+2y=12$ στο σημείο $P(4,4)$

Έστω η εξίσωση του $(x-a)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \xrightarrow{(C)}$
$(x-a)^2+(y-\beta)^2=80$. Οπότε μένει η εύρεση του $K(a,\beta)$

Καθώς $P \in C \Rightarrow (4-a)^2+(4-\beta)^2=80$ (1)

→ Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του κύκλου είναι κάθετη με την εφαπτόμενη στο σημείο τομής
$\Rightarrow$ Το διάνυσμα $\vec{KP}$ είναι κάθετο στην (ε)

$\lambda(\varepsilon) = -\frac{1}{2}$ $\left\{ x+2y=12 \Rightarrow 2y = 12 - x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 6 \right.$

$\downarrow$

Συντελεστης διευθυνσης της (ε)

$\left.\begin{array}{l} K(a,\beta) \\ P(4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{KP} = \dfrac{0-\beta}{4-a}$

Αν εχω $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ $\Rightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_2}{y_2-y_1} \Rightarrow$

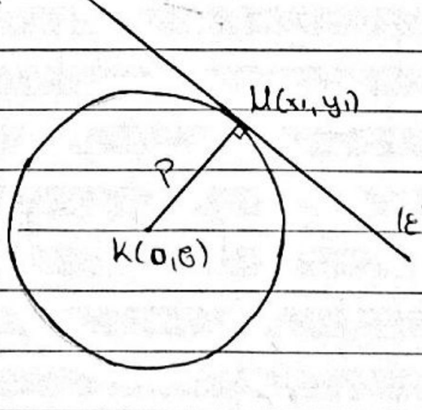
$y - y_1 = \underbrace{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}_{\lambda_{P_1P_2}} (x-x_1)$

Εφοσον ειναι καθετα

Αρα $\lambda(\varepsilon)\cdot\lambda(KP) = -1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{0-\beta}{4-a} = -1 \quad (2) \\ (4-a)^2 + (0-\beta)^2 = 80 \quad (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} a=0 \text{ και } \beta=-4 \\ \text{ή } a=8 \text{ και } \beta=12 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + (y+4)^2 = 80 \\ \text{ή } (x-8)^2 + (y-12)^2 = 80 \end{array}\right.$

Ευρεση εξισωσης εφαπτομενης κυκλου



Εστω η (ε) εφαπτεται του $C(K,\rho)$ στο σημειο $M(x_1,y_1)$

Αρα το $\vec{KM}$ ειναι καθετο στην (ε)

$\lambda_{\vec{KM}}\cdot\lambda(\varepsilon) = -1 \Rightarrow \lambda(\varepsilon) = -\dfrac{1}{\lambda_{\vec{KM}}}$

Αφου $M \in C \Rightarrow (x-a)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$ (*)

No. Date

Η $\vec{KM}$ διερχεται απο $K(a,\beta)$, $M(x_1,y_1)$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y-\beta}{y_1-\beta} \Rightarrow y-\beta = \underbrace{\frac{y_1-\beta}{x_1-a}}_{\lambda_{\vec{KM}}} \cdot (x-a) \Rightarrow$$

$$\lambda_{(\varepsilon)} = \frac{x_1-a}{y_1-\beta}$$

$$\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right) \quad P_1(x_1,y_1) \quad P_2(x_2,y_2)$$

$$\downarrow$$

$y-y_1 = \lambda\varepsilon\,(x-x_1)$. Αρα η (ε) εχει την εξισωση:

$$y-y_1 = \lambda\varepsilon \cdot (x-x_1) \Rightarrow y-y_1 = \frac{x_1-a}{y_1-\beta} \cdot (x-x_1) \Rightarrow$$

προσθαφ το β   προσθαφ το α

$$(y-y_1)(y_1-\beta) + (x-x_1)(x_1-a) = 0 \Rightarrow$$

$$((y-\beta)-(y_1-\beta)) \cdot (y_1-\beta) + ((x-a)-(x_1-a)) \cdot (x_1-a) = 0 \Rightarrow$$

$$(y-\beta)(y_1-\beta) - (y_1-\beta)^2 + (x-a)(x_1-a) - (x_1-a)^2 = 0 \overset{\oplus}{\Rightarrow}$$

$$(x-a)(x_1-a) + (y-\beta)(y_1-\beta) = \rho^2$$

Αρα εξισωση εφαπτομενης κυκλου σεο σημειο $M(x_1,y_1)$:

$$(x-a)(x_1-a) + (y-\beta)(y_1-\beta) = \rho^2$$

π.χ

Η εξισωση της εφαπτομενης του κυκλου:

$$x^2+y^2+4x-6y+2=0$$

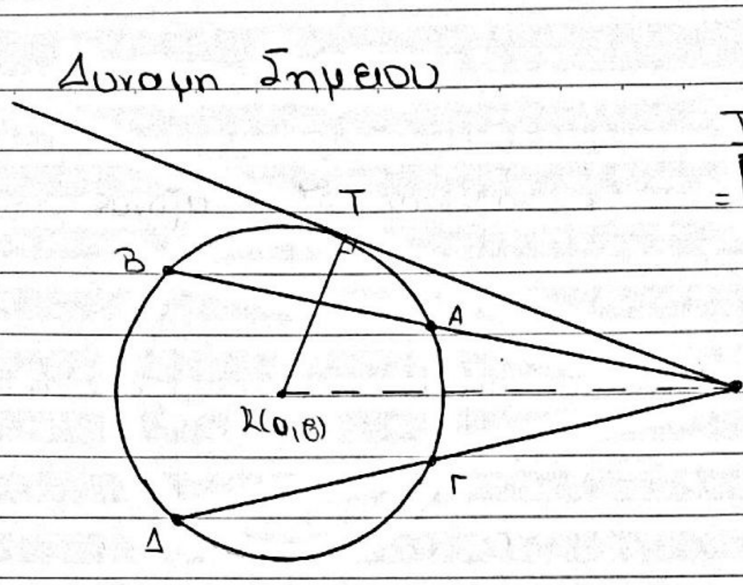
$$x^2+4x+2^2-2^2+y^2-6y+3^2-3^2+2=0 \Rightarrow$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 11 \rightarrow K(-2,3) \text{ και } \rho=\sqrt{11}$$

τυχαιο σημειο $\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{2}+3 \end{cases}$ Αρα $(1, \sqrt{2}+3) \in (C)$

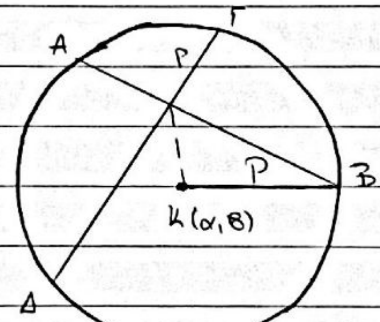
Συνεπως εξ. εφαπτ: $(x+2)(1-(-2)) + (y-3)(\sqrt{2}+3-3) = (\sqrt{11})^2$

Δυναμη Σημειου



Ισχυει $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta =$
$= \boxed{(PK)^2 - \rho^2}$ $(= (PT)^2)$

(Συνθηκη για να ειναι τεσσερα σημεια ομοκυκλικα)



$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta = \rho^2 - (PK)^2$

Παρατηρουμε αν το P ανηκει στον κυκλο $\Rightarrow$ η δυναμη του $= 0$

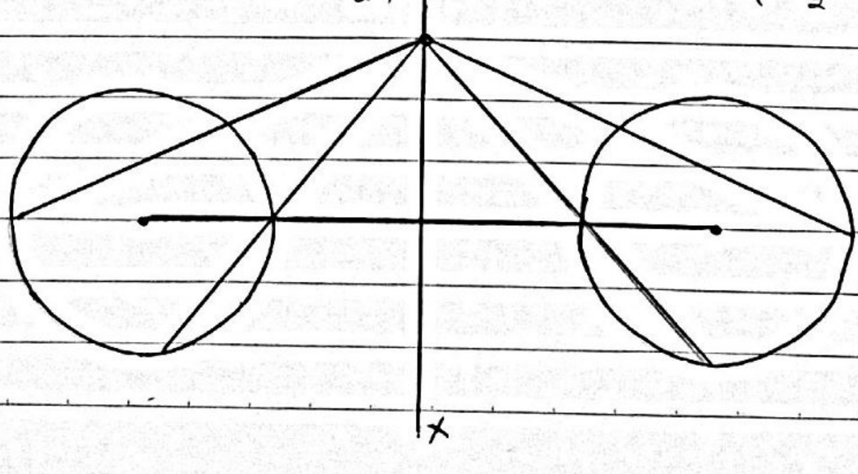
Ορισμος
Ο αριθμος $\delta = (PK)^2 - \rho^2$ καλειται δυναμη του σημειου P ως προς κυκλο $C(K,\rho)$

Ριζικος Αξονας

Εστω δυο κυκλοι $C_1(K_1,\rho_1)$, $C_2(K_2,\rho_2)$

$x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$

$K_1\left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2}\right)$ $K_2\left(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2}\right)$



No. Date

Ορισμος

Ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που εχουν την ιδια δυναμη ως προς κυκλους C_1, C_2 καλειται ριζικος αξονας των C_1, C_2

Παρατηρηση

Ο ριζικος αξονας ειναι ευθεια καθετη στην διακεντρο $\overrightarrow{K_1K_2}$